Двадцатый Первый Российский Фестиваль юных математиков

Решения Лиги стратегий. Третий тур.

1. Покрасим клетки в шахматном порядке и докажем, что хороших черных, так и хороших белых клеток нечетное число. Откуда следует утверждение задачи. Рассмотрим, например, черные клетки. Проведем диагонали, соединяющие их центры, а на границе также проведем отрезки длины 2, соединяющие центры ближайших граничных черных клеток. Получилось несколько прямоугольных равнобедренных треугольников с диагональю 2 и еще большее количество квадратов с диагональю 2. Проведем в каждом таком квадрате горизонтальную диагональ. Теперь получилось множество треугольников.

Утверждение: четность количества белых хороших узлов равна четности количества разноцветных треугольников в получившейся картинке. Именно, каждому граничному хорошему белому узлу сопоставляется разноцветный треугольник, для которого этот узел будет серединой гипотенузы. Внутренний же белый узел будет хорошим если и только если из двух треугольников, у которых он является серединой гипотенузы, ровно один — разноцветный. Теперь заметим, что при перекрашивании внутреннего (черного) узла x четность количества разноцветных треугольников не меняется. Действительно, треугольник является разноцветных только если в нем нечетное количество сторон вида 12. Суммируя по треугольникам с вершиной x видим, что каждая сторона xa участвует в двух из них, так что на четность количества сторон 12 во всех треугольниках перекраска вершины x не влияет. Осталось перекрасить в цвет 1 все внутренние черные узлы и заметить, что разноцветных треугольников ровно $(2009 + 2007)/3$ — нечетное число.

2. Так как точки B и M не совпадают, то прямые BC и AD не параллельны. Обозначим их точку пересечения через T. Хорошо известно, что прямая EF является полярой точки T относительно окружности, описанной вокруг четырехугольника $ABCD$, поэтому прямая TM касается этой окружности. Из этого следует, что $\angle(TM, CM) = \angle(MN, CN)$. Так как прямые CN и AD параллельны, то $\angle(MN, CN) = \angle(MK, LK)$, поэтому окружность, описанная вокруг треугольника KLM, касается прямой TM. Тогда с одной стороны $TM^2 = TK \cdot TL$, а с другой — $TM^2 = TB \cdot TC$, из чего следут, что $TK \cdot TL = TB \cdot TC$, а значит точки K, L, B и C лежат на одной окружности.

3. Сложим неравенство о средних для 7 чисел

$$\frac{a^7}{b^3c^2} + \frac{a^7}{b^3c^2} + b^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 \geqslant 7a^2$$

и два аналогичных.

4. Положим $p(x) = \sum a_k x^k$. Тогда $c = p(w) = \sum a_k w^k$, $c = \bar{p(w)} = p(\bar{w}) = p(w^{-1}) = \sum a_k w^{-k}$. Отсюда $c = \sum a_k(w^k + w^{-k})/2$, $\sum a_k(w^k - w^{-k}) = 0$. Если $w = \pm 1$, утверждение задачи очевидно (годится $q(x) = c$), в противном случае поделим на $w - w^{-1}$ и получим $\sum a_k((w^k - w^{-k}))/(w - w^{-1}) = 0$. Отсюда

$$p(w) = \sum a_k \left(\frac{w^k + w^{-k}}{2} + \frac{(w^k - w^{-k})(w + w^{-1})}{2(w - w^{-1})} \right),$$

выражение в скобках равно $(w^{k+1} - w^{-(k+1)})/(w - w^{-1})$, что является, как нетрудно видеть, многочленом от $w + w^{-1}$ с целыми коэффициентами.

5. Пусть $2^k \leqslant n^3 < 2^{k+1}$. Если среди наших чисел найдется число, большее, чем 2^k, то оно уже больше чем $n^{2.99}/2$ и все ясно. В противном случае рассмотрим только числа, большие, чем $n/2$. Их хотя бы $n/2$, и хотя бы $n/2k$ из них находятся в одном и том же отрезке $[2^r, 2^{r+1}]$ для некоторого $r \leqslant k$. Упорядочим эти числа и рассмотрим только числа с нечетными номерами, их будет хотя бы $n/4k$ и поэтому расстояние между какими-то двумя будет не больше, чем $2^r/(n/4k - 1) \leqslant 10k \cdot 2^r/n$. Таким образом, мы нашли три из наших чисел $a < b < c$ так, что $c - a \leqslant 10ka/n$. Заметим, что выражение $\text{НОК}(a, b, c) \cdot (b-a)(c-b)(c-a)$ кратно abc, поэтому $\text{НОК}(a, b, c) \geqslant \frac{abc}{(b-a)(c-b)(c-a)} \geqslant (\frac{a}{c-a})^3 \geqslant (n/10k)^3$.

Осталось заметить, что k растет как $\log n$, так что при больших n последнее выражение больше, чем $n^{2{,}99}$, а при малых мы подберем подходящее c.

6. Заметим, что $-a_n = \{x^{n+1}\} - x\{x^n\}$. Если T — период последовательности a_n, то имеем $\{x^{n+T+1}\} - \{x^{n+1}\} = x(\{x^{n+T}\} - \{x^n\}) =: f(n)$. Таким образом, для ограниченной последовательности $f(n)$ имеем $f(n+1) = xf(n)$ с некоторого места. Это значит, что с некоторого места $f(n) = 0$, то есть $g(n) := x^{n+T} - x^n = x^n(x^T - 1)$ — целое число. Отсюда $x = g(n+1)/g(n)$ — рациональное, $x = a/b$ для взаимно простых $a > b > 1$. Но тогда x^n — несократимая дробь со знаменателем b^n, и умножение на $x^T - 1$ но поможет ей сократиться полностью, если n достаточно велико.

7. Не может. Рассмотрим граф, индуцированный парой цветов и заметим, что в нем не должно быть циклов. Тогда ребер в нем строго меньше, чем вершин. Делая это для всех пар цветов, получаем, что ребер в нашем графе не более, чем в 10 раз больше, чем вершин — противоречие с тем, что их больше в 50 раз.

8. Ответ: $2(2+3+\ldots+(n+1)) = n(n+3)$. Пример: прямые $x = a$, $y = a$, взятые по $a+1$ раз для $a = 2$, $3, \ldots, n$. Докажем по индукции, что в аналогичной задаче для прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant A$, $0 \leqslant y \leqslant B$ прямых не меньше, чем $(2+3+\ldots+(A+1)) + (2+3+\ldots+(B+1))$. Для $A = 0$ или $B = 0$ утверждение очевидно. Пусть $A, B \geqslant 1$ и для прямоугольников меньших размеров (скажем, с меньшей суммой $A+B$) утверждение доказано. Посмотрим отдельно прямые $x = A+1$. Если таких прямых хотя бы $A+1$, убираем их и применяем индукционное предположение. Так что можно считать, что их не более A, а прямых $y = B+1$ — не более B. Обозначим количества этих прямых $A-\delta_1 \leqslant A$, $B-\delta_2 \leqslant B$ соответственно. Заметим, что каждая из оставшихся прямых покрывает не более двух точек на периметре прямоугольника, а всего их надо покрыть хотя бы

$$\sum_i = 1^{A-1}(2(i+1)+\delta_2) + \sum_j = 1^{B-1}(2(j+1)+\delta_2) + (1+\delta_1) + (1+\delta_2) + (1+\delta_1+\delta_2) \geqslant$$
$$\geqslant 2\left((2+3+\ldots+A) + (2+3+\ldots+B) + 2+\delta_1+\delta_2\right) - 1$$

раз, так что еще имеется хотя бы

$$(2+3+\ldots+A) + (2+3+\ldots+B) + 2+\delta_1+\delta_2$$

прямых, что и требовалось.

9. Докажем, что хотя бы одна из сфер, описанных в условии, содержит внутри себя весь многогранник. Сначала проверим, что для плоского многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ (одной из граней нашего многогранника) найдется такой номер $i \in \{3, \ldots, n\}$, что описанная окружность треугольника $A_1A_2A_i$ содержит внутри весь многоугольник. Достаточно выбрать i так, что угол $\angle A_1A_iA_2$ максимален. Рассмотрим сферу, содержащую эту окружность, имеющую достаточно большой радиус и центр в том же полупространстве, что и многогранник. Она будет содержать наш многогранник. Приближая центр сферы к грани, добьемся, чтобы она содержала еще одну вершину многогранника. Пусть O —центр этой сферы, P — произвольная точка в многограннике. Проведем через середину отрезка OP плоскость α ему перпендикулярную. Одна из вершин K многогранника лежит в том же полупространстве относительно α, что и P. Тогда $PK \leqslant PO \leqslant 1$, то есть точка P покрыта указанными шарами.

10. Пусть вписанная окружность касается стороны AC в точке B_1, а вневписанная — в точке B_2. Инверсия относительно окружности, построенной на отрезке B_1B_2 как на диаметре, переводит прямую $B'L$ в окружность ω, проходящую через середину M стороны AC и касающуюся вписанной и вневписанной окружностей внутренним и внешним образом соответственно. Из единственности такой окружности и теоремы Фейербаха следует, что окружность ω является окружностью девяти точек треугольника ABC. Так как при рассматриваемой инверсии вписанная окружность переходит в себя, то точка B' переходит в точку Фейербаха, а точка L в точку H. Из этого следует, что $ML \cdot MH = MB' \cdot MF$, а значит точки H, L, F и B' лежат на одной окружности.

Решения Лиги тактик. Третий тур.

1. Заметим, что $f(f(x+y)) = f(f(y+x))$, откуда имеем $f(x)+y = f(y)+x$. Из последнего равенства получаем, что $f(x)-x = f(y)-y$ для любой пары натуральных x и y. Значит, $f(x) = x+c$, где c — константа. С другой стороны, имеем $y+c+x = f(y)+x = f(f(x+y)) = f(x+y+c) = x+y+2c$, откуда уже заключаем, что $c = 0$. Таким образом, ответ: $f(x) = x$.

2. Пусть $\left[\frac{2^n}{n}\right] = 2^k$, откуда $n2^k \leqslant 2^n \leqslant n(2^k+1)$. Поделив 2^n на n с остатком, имеем $2^n = n2^k + r$, где $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Если $2^k < n$, то $2^n = n2^k + r \leqslant n^2 + n$. Но про $n > 4$ верно, что $2^n > n^2 + n$ (легко проверятся по индукции), так что в этом случае получаем противоречие. Если же $2^k \geqslant n$, то $2^k > r$, с другой стороны из равенства $2^n = n2^k + r$ мы видим, что r делится на 2^k. Это означает, что $r = 0$ и $n = 2^{n-k}$, что и требовалось доказать.

3. Предположим, что такой граф нашелся. Пусть в нем n вершин, и тогда в нем $3n$ ребер. Выкинем вершины первого цвета. По предположению, в оставшемся графе нет циклов, а значит этот граф — лес на не более, чем n вершинах. Тогда в нем не больше $n-1$ ребра. Аналогично в графе без вершин второго и вершин третьего цвета тоже не больше $n-1$ ребра. Но каждое ребро при таких операциях было посчитано ровно 1 раз, что означает, что во всем графе не больше $3n-3$ ребер. Противоречие.

4. Совместим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ по равной стороне AB так, чтобы стороны BC и B_1C_1 лежали на одной прямой. Продлив сторону A_1C_1 за точку A_1 на длину стороны AC, получим точку X. Заметим, что треугольник AXC правильный, и $AB \| XC$. Треугольники $C_1A_1B_1$ и C_1XC подобны, откуда имеем $\frac{AB}{CX} = \frac{A_1C_1}{A_1C_1+A_1X}$. Так как $AX = XC = AC$, то последнее равенство можно переписать в виде $\frac{AB}{AC} = \frac{A_1C_1}{A_1C_1+AC}$. Переворачивая последнее равенство и деля его на AC получаем требуемое.

5. Заметим, что $a^4+b^2+1 \geqslant 2a^2+b^2 \geqslant 2\sqrt{2}ab$. Отсюда $\frac{c}{a^4+b^2+1} \leqslant \frac{c}{2\sqrt{2}ab} = \frac{c^2}{2\sqrt{2}}$. Складывая такие неравенства, получаем требуемое.

6. Проведем отрезок MB и заметим, что в силу симметрии $MB = MD = MN$. Отсюда $\angle MDC = \angle MBC = \angle MNB$, что означает, что четырехугольник $DMNC$ вписанный. Отсюда $\angle RAP = \angle ACB = \angle RDP$, откуда получаем, что четырехугольник $ARPD$ вписанный. Отсюда уже получаем, что $\angle DAC = \angle DRP$, что и означает, что треугольник DRP равнобедренный.

7. Заметим, что если $a > b$ — натуральные числа, то $(a,b) \leqslant a-b$ (так как делит эту разность), откуда $[a,b] = \frac{ab}{(a,b)} \geqslant \frac{ab}{a-b}$. Значит, нам достаточно доказать, что среди данных n чисел найдется два числа $a > b$ таких, что $\frac{ab}{a-b} \geqslant \frac{n^2}{4}$. Последнее неравенство, равносильно тому, что $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \leqslant \frac{4}{n^2}$. Чтобы доказать это, разберем отдельно случаи четного и нечетного n. Пусть, $n = 2k$. Тогда среди выбранных чисел есть $k+1$ число, больше либо равное k. Обратные к этим числам не превосходят $\frac{1}{k}$. Упорядочим обратные числа и рассмотрим разности соседних. Этих разностей ровно k, и значит одна из них не превосходит $\frac{1}{k^2} = \frac{4}{n^2}$. Теперь пусть $n = 2k+1$. Заметим, что тогда есть хотя бы $k+1$ число, больше, либо равное $k+1$. Отсюда, так же как и выше, заключаем, что среди обратных к этим числам найдутся два, разность которых строго меньше, чем $\frac{1}{k(k+1)}$. Отсюда следует, что НОК этих чисел строго больше, чем $k(k+1)$ и, значит, больше либо равен, чем $k(k+1)+1$, что уже больше, чем $\frac{n^2}{4} = k^2 + k + \frac{1}{4}$.

8. Пронумеруем строки леса $1, 2, 3, \ldots, 2011$. Заметим, что в каждых двух соседних строках можно, во–первых, спилить деревья не более, чем в одной строке, и, во–вторых, в каждой строке из n деревьев можно спилить не более, чем $\lceil n/2 \rceil$ (округление в верхнюю сторону) деревьев. Поэтому в первой строке можно спилить не более 1-го дерева, в следующих двух строках – не более двух, в следующих двух строках – не более трех и т.д. То есть всего можно спилить не более, чем $1 + 2 + \ldots + 1006 = 1006 \cdot 1007/2$ деревьев.
Пример. Спилим в 1 строке 1 дерево, в третьей строке 1, 3 и 5 дерево, в пятой строке 1, 3, 5, 7 дерево и т.д. Можно показать, что он подходит.

9. Решение этой задачи содержится в решении задачи 6 лиги стратегий.

10. Пусть фишка находится на поле с простым числом. Будем называть его проигрышным, если игрок, находясь на этой позиции (перед свом ходом), прогрывает при правильной игре противника. Рассмотрим такое наименьшее число n, что числа $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+2010$ являются составными (такое n существует, так как $b = 2011!+1$ – такое число, что $b+i \; \vdots \; i+1$, $i = 1, \ldots, 2010$). Пусть p_1 – наибольшее простое число, не превосходящее n. Ясно, что p_1 – проигрышное число, и это самое большое проигрышное число, ибо большие простые числа в игре недостижимы. Тогда предыдущее проигрышное число p_2 – это наибольшее простое число, не превосходящее $p_1 - 2011$. Так как простые числа среди $p_1 - 1$, $\ldots$, $p_1 - 2010$ – выигрышные. Аналогично, предыдущее перед p_2 проигрышное число – это наибольше простое число, не превосходящее $p_2 - 2011$. Так мы строим последовательность $p_1 > p_2 > p_3 \ldots$ всех проигрышных простых чисел.
Надо узнать, входит ли в эту последовательность число 2. Если входит, то это означает, что 2 – наибольшее простое число, не превосходящее $p_k - 2011$. Но тогда число 3 тоже не превосходит $p_k - 2011$. В само деле, иначе $2 \leqslant p_k - 2011$ и $3 > p_k - 2011$, откуда $p_k = 2013$ должно быть простым, что неверно.
Итак, число 2 выигрышное, то есть первый игрок имеет выигрышную стратегию: он отправляет первым ходом второго на число p_k, и если второй смог сделать ход, то его первый может отправить его на p_{k-1} и т.д.